1999 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$______.

【答】 $\dfrac{1}{3}$

【详解 1】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

【详解 2】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

（2）$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2dt=$______.

【答】 $\sin x^2$.

【详解】

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dt\,\underline{\underline{x-t=u}}\,\frac{d}{dx}\int_x^0\left(-\sin u^2\right)du\\&=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2du\\&=\sin x^2\end{aligned}$$

故本题应填$\sin x^2$

(3) $y''-4y=e^{2x}$ 的通解为______.

【答】 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$, 其中 C_1,C_2 为任意常数.

【详解】 特征方程为：$\lambda^2-4=0$, 解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$

故 $y^{''}-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$, 由于非齐次项为 $f(x)=e^{2x}$， $a=2$ 为特征方程的单根，因此原方程的特解可设为 $y^*=Axe^{2x}$, 代入原方程可求得 $A=\frac{1}{4}$，

故所求通解为

$$y=y_1+y^*=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$$

故本题应填 $y=C_1e^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)e^{2x}$,

（4）设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是_____.

【答】 $n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}$

【详解】 因为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda-n\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}$$

故矩阵 A 的 n 个特征值是 n 和 0（$n-1$ 重）

因此本题应填 $n,\overbrace{0,\cdots,0}^{n-1}$.

（5）设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件：$ABC=\phi,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 则 $P(A)=$_____.

【答】 $\frac{1}{4}$.

【详解】 根据加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)$$

由题 A,B 和 C 两两相互独立，$ABC=\phi,P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 因此有

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P^2(A),$$
$$P(ABC)=P(\phi)=0,$$

从而$P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3P^2(A)=\dfrac{9}{16}$

解得　$P(A)=\dfrac{3}{4},P(A)=\dfrac{1}{4}$

又根据题设 $P(A)<\dfrac{1}{2}$,故 $P(A)=\dfrac{1}{4}$

二、选择题

（1）设$f(x)$是连续函数，$F(x)$是其原函数，则

（A）　当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数.

（B）　当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数.

（C）　当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数.

（D）　当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数.

【 】

【答】　应选（A）

【详解】　$f(x)$的原函数$F(x)$可以表示为$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$,于是

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)dt+C\underline{\underline{u=-t}}\int_0^x f(-u)d(-u)+C.$$

当$f(x)$为奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)du+C$$
$$=\int_0^x f(t)dt+C=F(x)$$

即　$F(x)$为偶函数.

故（A）为正确选项.至于（B）、（C）、（D）可分别举反例如下：

$f(x)=x^2$是偶函数，但其原函数$F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+1$不是奇函数，可排除（B）；

$f(x)=\cos^2 x$是周期函数，但其原函数$F(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$不是周期函数，可排除（C）；

$f(x)=x$在区间$(-\infty+\infty)$内是单调增函数，但其原函数$F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$在区间$(-\infty+\infty)$内非单调增函数，可排除（D）.

（2）设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, x>0\\ x^2 g\left(x\right), x\le 0\end{cases}$ 其中 $g\left(x\right)$ 是有界函数，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处

（A）极限不存在.　　　　（B）极限存在，但不连续

（C）连续，但不可导　　　　（D）可导.

【 】

【答】　应选（D）

【详解】　因为

$$f^{'}\left(0+0\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f^{'}\left(0-0\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g\left(x\right)}{x}\lim_{x\to 0^-}g\left(x\right)x=0,$$

可见，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处左、右导数相等，因此，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，

故正确选项为(D).

(3)设 $f\left(x\right)=\begin{cases}x, 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 2-2x, \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S\left(x\right)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty,$

其中 $a_n=2\int_0^1 f\left(x\right)\cos n\pi x dx, \left(n=0,1,2,\cdots\right)$, 则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $-\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{3}{4}$　　(D) $-\dfrac{3}{4}$

【 】

【答】　应选（C）.

【详解】　由题设知，应先将 $f\left(x\right)$ 从 $\left[0,1\right)$ 作偶延拓，使之成为区间 $\left[-1,1\right]$ 上的偶函数，然后再作周期（周期 2）延拓，进一步展开为傅里叶级数，根据收敛定理有

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-2-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}$$

$$=\frac{3}{4}.$$

（4）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

（A）当 $m>n$ 时，必有行列式 $\left|AB\right|\ne 0$　　（B）当 $m>n$ 时，必有行列式 $\left|AB\right|=0$

（C)）当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$ （D）当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】 因为 AB 为 m 阶方阵，且

秩 $r(AB)\leq\min\left[r(A),r(B)\right]\leq\min(m,n)$

当 $m>n$ 时，由上式可知，$r(AB)\leq n<m,$ 即 AB 不是满秩的，故有行列式 $|AB|=0.$

因此，正确选项为（B）.

（5）设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

（A） $P\{X+Y\leq 0\}=\dfrac{1}{2}.$ (B) $P\{X+Y\leq 1\}=\dfrac{1}{2}.$

（C） $P\{X-Y\leq 0\}=\dfrac{1}{2}.$ (D) $P\{X-Y\leq 1\}=\dfrac{1}{2}.$

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】 根据正态分布的性质，服从正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态分布.因此

$(X+Y)\sim N(1,2),(X-Y)\sim N(-1,2)$

利用正态分布在其数学期望左右两侧取值的概率均为 $\dfrac{1}{2}$ 知，(B）为正确选项.

三、设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx}.$

【详解】 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)f^{'}\\ F^{'}x+F^{'}y\dfrac{dy}{dx}+F^{'}z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf^{'}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=f+xf^{'}\\ F^{'}y\dfrac{dy}{dx}+F^{'}z\dfrac{dz}{dx}=-F^{'}x\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\left(f+xf^{'}\right)F^{'}y-xf^{'}F^{'}z}{F^{'}y+xf^{'}F^{'}z},\left(F^{'}y+xf^{'}F^{'}z\neq 0\right)$$

四、 求 $I=\int_L\left(e^x\sin y-b\left(x+y\right)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$, 其中 a,b 为正常数， L 为从点 $A\left(2a,0\right)$ 沿曲线 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 到点 $O\left(0,0\right)$ 的弧.

【详解】 添加从点 $O\left(0,0\right)$ 沿 $y=0$ 到点 $A\left(2a,0\right)$ 的有向直线段 L_1, 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{L+L_1}\left[e^x\sin y-b\left(x+y\right)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy\\&-\int_{L_1}\left[e^x\sin y-b\left(x+y\right)\right]dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy\end{aligned}$$

利用格林公式，前一积分

$$\begin{aligned}I_1&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(b-a\right)dxdy\\&=\frac{\pi}{2}a^2\left(b-a\right)\end{aligned}$$

其中 D 为 $L+L_1$ 所围成的半圆域，后一积分选择 x 为参数，得 L_1：

$$\begin{cases}x=x\\y=0\end{cases},\left(0\le x\le 2a\right),$$

可直接积分

$$I_2=\int_0^{2a}\left(-bx\right)dx=-2a^2b$$

故 $$I=I_1-I_2=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3.$$

五、 设函数 $y\left(x\right)\left(x\ge 0\right)$ 二阶可导且 $y^{'}\left(x\right)>0,y\left(0\right)=1,$ 过曲线 $y=y\left(x\right)$ 上任意一点 $P\left(x,y\right)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1, 区间 $\left[0,x\right]$ 上以 $y=y\left(x\right)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 ，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y\left(x\right)$ 的方程.

【详解】 曲线 $y=y\left(x\right)$ 上点 $P\left(x,y\right)$ 处的切线方程为

$$Y-y\left(x\right)=y^{'}\left(x\right)\left(X-x\right)$$

它与 x 轴的交点为 $\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$ 由于 $y'(x)>0, y(0)=1,$ 因此 $y(x)(x>0)$

于是 $S_1=\dfrac{1}{2}y\left|x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right|=\dfrac{y^2}{2y'}.$

又 $S_2=\int_0^x y(t)dt$

根据题设 $2S_1-S_2=1$，有 $\dfrac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)dt=1,$

并且 $y'(0)=1$，两边对 x 求导并化简得

$yy''=(y')^2$

这是可降阶得二阶常微分方程，令 $p=y'$，则上述方程可化为

$yp\dfrac{dp}{dy}=p^2$，分离变量得

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$$

解得 $p=C_1y$，即 $\dfrac{dy}{dx}=C_1y,$

从而有 $y=C_1e^x+C_2$

根据 $y(0)=1, y'(0)=1,$ 可得 $C_1=1, C_2=0,$

故所求曲线得方程为 $y=e^x.$

六、试证：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2.$

【详解 1】

令 $f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2$． 易知 $f(1)=0$

又

$$f'(x)=2x\ln x-x+2-\frac{1}{x}, f'(1)=0$$

$$f''(x)=2\ln x+1+\frac{1}{x^2}, f''(1)=2>0$$

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

可见，当$0<x<1$时，$f'''(x)<0$;当$1<x<+\infty$时，$f'''(x)>0$;

因此，有当$1<x<+\infty$时，

$$f''(x)\ge f''(1)=2>0$$

又由$f'(1)=0$及$f'(x)$是单调增函数推知，当$0<x<1$时，$f'(x)<0$;当$1<x<+\infty$时，$f'(x)>0$;因此进一步有$f(x)\ge f(1)=0(0<x<+\infty)$，即证之：

当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

【详解 2】

先对要证的不等式作适当变形，则当$x>0$时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.等价于当$0<x<1$时，$\ln x\le\frac{x-1}{x+1}$;当$1<x<+\infty$时，$\ln x\ge\frac{x-1}{x+1}$;于是令

$$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$$

则 $$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0(x>0)$$

又因为$f(1)=0$，可见有

当$0<x<1$时，$f(x)<0$，

当$1<x<+\infty$时，$f(x)>0$，从而当$x>0$时，有

$$(x^2-1)f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2\ge 0,$$

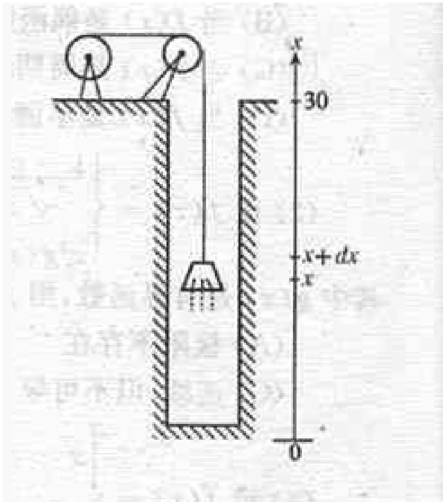
即当 $x>0$时，$(x^2-1)\ln x\ge(x-1)^2$.

七、为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口，已知井深 30m,抓斗自重 400 N,缆绳每米重 500 N，抓斗抓起的污泥重 2000 N，提升速度为 3m/s,在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？（说明：①$1N\times 1m=1J$;m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度位于井口上方的缆绳长度忽略不计）

【详解 1】

建立坐标轴如图所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功

$$W=W_1+W_2+W_3$$



其中W_1是克服抓斗自重所作的功；W_2是克服缆绳重力作的功；W_3为提出污泥所作的功.由题意知

$$W_1 = 400 \times 30 = 12000.$$

将抓斗由x处提升到$x+dx$处，克服缆绳重力所作的功为

$$dW_2 = 50(30-x)dx,$$

从而　$W_2 = \int_0^{30} 50(0-x)dx = 22500.$

在时间间隔$[t, t+dt]$内提升污泥需作功为

$$dW_3 = 3(2000-20t)dt.$$

将污泥从井底提升至井口共需时间$\frac{30}{3}=10$，所以

$$W_3 = \int_0^{10} 3(2000-20t)dt = 57000.$$

因此，共需作功

$$W = 12000 + 22500 + 57000 = 91500(J)$$

【详解 2】

作x轴如图所示，将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功记为W，当抓斗运动到x处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 400 N, 缆绳的重力 $50(30-x)(N)$，污泥的重力 $2000-\frac{1}{3}x\cdot 20(N)$，即

$$f(x) = 400 + 50(30-x) + 2000 - \frac{20}{3}x = 3900 - \frac{170}{3}x,$$

于是

$$W=\int_0^{30}\left(3900-\frac{170}{3}x\right)dx=3900x-\frac{85}{3}x^2\Big|_0^{30}=117000-24500=91500\left(J\right)$$

八、设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P\left(x,y,z\right)\in S,\pi$ 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho\left(x,y,z\right)$ 为点 $O\left(0,0,0\right)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_S\frac{z}{\rho\left(x,y,z\right)}dS.$

【详解】 令 $F\left(x,y,z\right)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2-1$, 设 $\left(X,Y,Z\right)$ 为 π 上任意一点，则 π 的方程为

$$F'_x\left(X-x\right)+F'_y\left(Y-y\right)+F'_z\left(Z-z\right)=0,$$

即 $\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$

从而知

$$\rho\left(x,y,z\right)=\frac{\left|Ax+By+Cz\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

这里 $A=\frac{x}{2},B=\frac{y}{2},C=z,$

由曲面方程知 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)},$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

因此

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,d\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}d\sigma$$

故有

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\frac{z}{\rho\left(x,y,z\right)}dS&=\iint\limits_S z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\,dS\\&=\frac{1}{4}\iint\limits_D\left(4-x^2-y^2\right)d\sigma=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\left(4-r^2\right)rdr\\&=\frac{3}{2}\pi\end{aligned}$$

九、设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx,$

（1） 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)$ 的值；

（2） 试证：对任意的常数 $\lambda>0,$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛

【详解】 （1）因为

$$\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx$$

$$\underline{\underline{\tan x=t}}\frac{1}{n}\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n(n+1)}$$

又由部分和数列

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\left(a_i+a_{i+2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=1-\frac{1}{n+1},$$

有 $\lim_{n\to\infty}S_n=1,$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(a_n+a_{n+2}\right)=1.$

（2）先估计 a_n 的值，因为

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx\underline{\underline{\tan x=t}}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1},$$

所以 $\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}},$

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 也收敛.

十、设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & -1 & c\\ 5 & b & 3\\ 1-c & 0 & -a\end{bmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

【详解】

根据题设有 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha,$

又 $AA^*=|A|E=-E,$ 于是 $AA^*\alpha=A\lambda_0\alpha=\lambda_0 A\alpha,$

即 $-\alpha=\lambda_0 A\alpha$

也即
$$\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由此，可得
$$\begin{cases} \lambda_0(a+1+c)=1 \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 \end{cases}$$

解此方程组，得 $\lambda_0=1, b=-3, a=c$

又由 $|A|=-1$ 和 $a=c$，有
$$\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1$$

故 $a=c=2,$

因此 $a=2, b=-3, c=2, \lambda_0=1.$

十一、设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

【详解】 必要性. 设 B^TAB 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有
$$x^T\left(B^TAB\right)x>0, \qquad 即 \qquad (Bx)^T BA(Bx)>0,$$

于是，$Bx\neq 0$.因此，$Bx=0$ 只有零解，故有 $r(B)=n$

充分性. 因 $\left(B^TAB\right)^T=B^TA^TB=B^TAB,$ 故 B^TAB 为实对称矩阵.若 $r(B)=n$ 则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $x\neq 0$，有 $Bx\neq 0$.又 A 为正定矩阵，所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^T BA(Bx)>0,$

于是当 $x\neq 0$，有 $x^T\left(B^TAB\right)x=(Bx)^T A(Bx)>0$，故 B^TAB 为正定矩阵.

十二、设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量 (X,Y) 联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处.

	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_i\}=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

【详解】

	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_i\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三、设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x),0<x<\theta\\ 0, \qquad \text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

（1） 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

（2） 求 $\hat{\theta}$ 的方差 $D\left(\hat{\theta}\right)$.

【详解】 (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^\theta \dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x)dx=\dfrac{\theta}{2}$

记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，令 $\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ ；

（2）由于

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^\theta \frac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)dx=\frac{6x^2}{20}$$

$$D(x)=E\left(x^2\right)-\left[E(x)\right]^2=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20}$$

因此 $\hat{\theta}=2\overline{X}$ 的方差为

$$D\left(\hat{\theta}\right)=D\left(2\overline{X}\right)=4D\left(\overline{X}\right)$$

$$=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$$