2004年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学一试题详解及评析

一、 填空题

（1）曲线 $y=\ln x$ 与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为_____.

【答】 $y=x-1$.

【详解】

由 $y'=\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}=1,$ 得 $x=1,$ 可见切点为 $\left(1,0\right)$，于是所求得切线方程为，

$y-0=1\cdot\left(x-1\right),$ 即 $y=x-1$

（2）已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f\left(1\right)=0$，则 $f\left(x\right)=$_____.

【答】 $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

【详解】

令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，于是有

$f'(t)=\dfrac{\ln t}{t}$， 即 $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x}.$

积分得 $f(x)=\displaystyle\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$. 利用初始条件 $f\left(1\right)=0$， 得 $C=0,$

故所求函数为 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

（3）设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L xdy-2ydx$ 的值为

【答】 $\dfrac{3}{2}\pi$.

【详解】正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，可表示为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta:0\to\frac{\pi}{2}.$$

于是 $$\int_L xdy-2ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]d\theta$$

$$=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}.$$

（4）欧拉方程 $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}+2y=0(x>0)$ 的通解为_____.

【答】 $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$.

【详解】 令 $x=e^t$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x^2}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}]$$

代入原方程，整理得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$$

解此方程，得通解为 $y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$.

（5）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$_____.

【答】 $\frac{1}{9}$.

【详解】已知等式两边同时右乘 A，得

$$ABA^*A=2BA^*A+A$$

而 $|A|=3$，于是有

$$3AB=6B+A,$$

即 $(3A-6E)B=A$，

再两边取行列式，有 $|3A-6E||B|=|A|=3$，

而 $|3A-6E|=27$，故所求行列式为 $|B|=\frac{1}{9}$.

（6）设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$_____.

【答】 $\frac{1}{e}$.

【详解】 由题设，知 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$，于是

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=P\{X>\frac{1}{\lambda}\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}=\frac{1}{e}.$$

二、选择题

（7）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　(B)　α,γ,β.　(C) β,α,γ.　(D)　β,γ,α.

【 】

【答】　应选（B）.

【详解】

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}{\int_0^x \cos t^2 dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot 2x}{\cos x^2}=0$$，可排除(C),(D)选项，

又 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\beta}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}dt}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x\tan x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=\infty$$，

可见，γ 是比 β 低阶无穷小量，故应选(B).

（8）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$，使得

(A)　$f(x)$ 在（0，δ) 内单调增加.　　(B)　$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

【 】

【答】　应选（C）.

【详解】　由导数的定义，知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

根据保号性，知存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0$$

即当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$f(x)<f(0)$.；而当 $x\in(0,\delta)$ 时，有 $f(x)>f(0)$.. 故应选(C).

（9）设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A)　若 $\lim_{n\to\infty}na_n$=0，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B)　若存在非零常数 λ，使得 $\lim_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

（C）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

（D）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim_{n\to\infty} n a_n = \lambda$.

【 】

【答】应选（B）.

【详解】 取 $a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$，则 $\lim_{n\to\infty} n a_n$=0，但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，排除(A)，(D)；

又取 $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，但 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \infty$，排除(C)，故应选(B).

（**10**）设 f(x)为连续函数，$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)$ 等于

(A) 2f(2). (B) f(2). (C) –f(2). (D) 0.

【 】

【答】 应选（B）.

【详解】交换积分次序，得

$$F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x)dx = \int_1^t [\int_1^x f(x)dy]dx = \int_1^t f(x)(x-1)dx$$

于是，$F'(t) = f(t)(t-1)$，

从而有 $F'(2) = f(2)$，故应选(B).

（**11**）设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 由题设，有

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B, \quad B\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$$

于是，

$$A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C.$$

可见，应选(D).

（12）设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有：

（A） A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.
（B） A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.
（C） A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.
（D） A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

【 】

【答】 应选（A）.
【详解 1】设 A 为 $m\times n$ 矩阵， B 为 $n\times s$ 矩阵，则由 $AB=0$ 知，

$r(A)+r(B)<n$

又 A, B 为非零矩阵，必有 $r\left(A\right)>0, r\left(B\right)>0$.可见 $r\left(A\right)<n, r\left(B\right)<n,$ 即 A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关，故应选(A).
【详解 2】由 $AB=0$ 知， B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，而 B 为非零矩阵，即 $Ax=0$ 存在非零解，可见 A 的列向量组线性相关。

同理，由 $AB=0$ 知，$B^T A^T = O$，于是有 B^T 的列向量组，从而 B 的行向量组线性相关，故应选(A).

（13）设随机变量 X 服从正态分布 $N\left(0,1\right)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$. (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$. (D) $u_{1-\alpha}$.

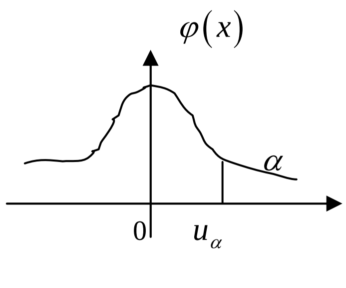
【 】

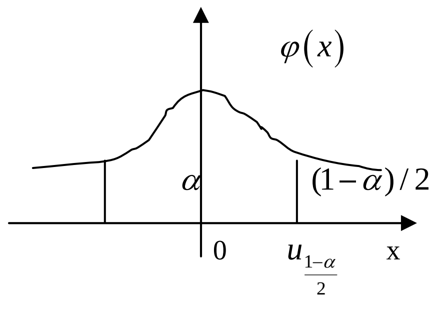
【答】 应选（C）.

【详解】 由标准正态分布概率密度函数的对称性知，$P\{X<-u_\alpha\}=\alpha$，于是

$$1-\alpha=1-P\{|X|<x\}=P\{|X|\ge x\}=P\{X\ge x\}+P\{X\le -x\}=2P\{X\ge x\}$$

即有 $P\{X\ge x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，可见根据定义有 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，故应选(C).





（14）设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>1)$ 独立同分布，且其方差为 $\sigma^2>0$. 令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

则

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$. (B) $Cov(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$. (D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=Cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}Cov(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}Cov(X_1,X_i)$$

$$=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

（15）设$e<a<b<e^2$，证明$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

【证法 **1**】 对函数$\ln^2 x$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$\ln^2 b-\ln^2 a=\frac{2\ln\xi}{\xi}(b-a),a<\xi<b.$$

设$\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则$\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，

当$t>e$时， $\varphi'(t)<0$，所以$\varphi(t)$单调减少，从而$\varphi(\xi)>\varphi(e^2)$，即

$$\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{\ln e^2}{e^2}=\frac{2}{e^2}$$

【证法 2】

设$\varphi(x)=\ln^2 x-\dfrac{4}{e^2}x$，则

$\varphi'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{4}{e^2}$， $\varphi''(x)=2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当$x>e$时，$\varphi''(x)<0$，故$\varphi'(x)$单调减少，从而当$e<x<e^2$时，

$$\varphi'(x)>\varphi'(e^2)=\frac{4}{e^2}-\frac{4}{e^2}=0$$

即当$e<x<e^2$时，$\varphi(x)$单调增加.

因此当$e<x<e^2$时，$\varphi(b)>\varphi(a)$，即 $\ln^2 b-\dfrac{4}{e^2}b>\ln^2 a-\dfrac{4}{e^2}a$，

故 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$

（16）某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下.现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h. 经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k = 6.0\times10^{6}$). 问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？

注 kg 表示千克，km/h 表示千米/小时.

【详解 1】

由题设，飞机的质量 m=9000kg，着陆时的水平速度 $v_0 = 700$ km/h. 从飞机接触跑道开始记时，

设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$.

根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$

又 $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$

由以上两式得

$dx = -\frac{m}{k}dv$，积分得 $x(t) = -\frac{m}{k}v + C.$

由于 $v(0) = v_0, x(0) = 0$，故得 $C = \frac{m}{k}v_0$，

从而 $x(t) = \frac{m}{k}(v_0 - v(t)).$

当 $v(t) \to 0$ 时， $x(t) \to \frac{mv_0}{k} = \frac{9000\times700}{6.0\times10^6} = 1.05(km).$

所以，飞机滑行的最长距离是 $1.05(km)$.

【详解 2】 根据牛顿第二定律，得 $m\frac{dv}{dt} = -kv$,所以 $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$

两端积分得通解 $v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$，代入初始条件 $v\Big|_{t=0} = v_0$ 解得 $C = v_0$，

故 $v(t) = v_0e^{-\frac{k}{m}t}$.

飞机滑行的最长距离为 $x = \int_0^{+\infty} v(t)dt = -\frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{mv_0}{k} = 1.05(km).$

或由 $\frac{dx}{dt} = v_0e^{-\frac{k}{m}t}$，知 $x(t) = \int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt = -\frac{kv_0}{m}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1)$，

故最长距离为当 $t \to \infty$ 时， $x(t) \to \frac{kv_0}{m} = 1.05(km).$

【详解 3】 根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}=0,$$

其特征方程为 $\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$，解之得 $\lambda_1=0,\lambda_2=-\frac{k}{m}$，

故 $x=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t}$.

由 $x\Big|_{t=0}=0, v\Big|_{t=0}=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}=-\frac{kC_2}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\Big|_{t=0}=v_0$

得 $C_1=-C_2=\frac{mv_0}{k}$，于是 $x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$.

当 $t\to+\infty$ 时，$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=1.05(km)$.

所以，飞机滑行的最长距离是 $1.05(km)$.

（17）计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$ 的上侧.

【详解】取 Σ_1 为 xoy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy\ -\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy.$$

由高斯公式知

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)dxdydz$$

$$=6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1dr\int_0^{1-r^2}(z+r^2)rdz=12\pi\int_0^1[\frac{1}{2}r(1-r^2)^2+r^3(1-r^2)]dr=2\pi.$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}-3dxdy=3\pi$，

故 $I=2\pi-3\pi=-\pi.$

（18）设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数. 证明此方程存在惟一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

【证明】记 $f_n(x)=x^n+nx-1$. 由 $f_n(0)=-1<0$， $f_n(1)=n>0$，及连续函数的介值定理知，方程 $x^n+nx-1=0$ 存在正实数根 $x_n\in(0,1)$.

当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，可见 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加, 故方程 $x^n+nx-1=0$ 存在惟一正实数根 x_n.

由 $x^n+nx-1=0$ 与 $x_n>0$ 知 $0<x_n=\dfrac{1-x_n^n}{n}<\dfrac{1}{n}$，

故当 $\alpha>1$ 时，$0<x_n^\alpha<(\dfrac{1}{n})^\alpha$.

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 收敛，所以当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^\alpha$ 收敛.

（19）设 z=z(x,y)是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

【详解】因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，

所以 $2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x-3y=0,\\ -3x+10y-z=0,\end{cases}$，故 $\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$

由 $2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2(\dfrac{\partial z}{\partial x})^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$， $-6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2(\frac{\partial z}{\partial y})^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

所以 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$, 又 $A=\frac{1}{6}<0$, 从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值，极小值为 $z(-9,-3)=-3.$

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6}，B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2}，C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}，$$

可知 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点(-9, -3)是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3.$

（**20**）设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0, \end{cases} \quad (n\ge 2)$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

【详解 1】对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n,$ 故方程组有非零解，

其同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$

由此得基础解系为：

$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$，$\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T$，$\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$，

于是方程组的通解为 $x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a\ne 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B\to\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

可知 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，故方程组也有非零解，

其同解方程组为
$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，

于是方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

【详解 2】 方程组的系数行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{vmatrix}=(a+\frac{n(n+1)}{2})a^{n-1}$$

当 $|A|=0$，即 a=0 或 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，方程组有非零解.

当 $\alpha=0$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$

由此得基础解系为 $\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T$， $\eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\cdots,\eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T$，

于是方程组的通解为：

$$x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}，\text{其中 } k_1,\cdots,k_{n-1} \text{ 为任意常数.}$$

当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，对系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，

于是方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

（21）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&\alpha&5\end{bmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$\alpha$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

【详解】 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-\alpha&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-(\lambda-2)&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-\alpha&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&\lambda-4&3\\-1&-\alpha&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

当$\lambda=2$是特征方程的二重根，则有$2^2-16+18+3a=0$, 解得$\alpha=-2$.

当$\alpha=-2$时，A的特征值为 2,2,6, 矩阵$2E-A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{bmatrix}$的秩为 1，

故$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量有两个，从而A可相似对角化。

若$\lambda=2$不是特征方程的二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3\alpha$为完全平方，从而$18+3\alpha=16$, 解得

$\alpha=-\dfrac{2}{3}$.

当$\alpha=-\dfrac{2}{3}$时，A的特征值为 2，4，4，矩阵$4E-A=\begin{bmatrix}3&-2&3\\1&0&3\\-1&\frac{2}{3}&-1\end{bmatrix}$秩为 2，故$\lambda=4$对应的线性无关的特征向量只有一个，从而$A$不可相似对角化.

(22) 设A,B为随机事件，且$P(A)=\frac{1}{4},P(B\mid A)=\frac{1}{3},P(A\mid B)=\frac{1}{2},$，

令 $X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases}$; $Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$.

求： (I) 二维随机变量(X,Y)的概率分布；

(II) X 和 Y 的相关系数ρ_{XY}.

【详解】(I) 由于$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$， $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$,

所以，

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A+B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}$$

（或 $P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$），

故 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) X,Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

则 $EX=\frac{1}{4}, EY=\frac{1}{6}$， $DX=\frac{3}{16}$， DY= $\frac{5}{36}$, E(XY)= $\frac{1}{12}$,

故 $Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24}$，

从而 $$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

（23）设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\frac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1, X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

（I） β 的矩估计量；

（II） β 的最大似然估计量.

【详解】 X 的概率密度为

$$f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\le 1.\end{cases}$$

（I） 由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)dx=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}dx=\frac{\beta}{\beta-1}$，

令 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为：

$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

（II）似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, x_i>1(i=1,2,\cdots,n),\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i>1(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

两边对 β 求导，得 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\frac{d\ln L(\beta)}{d\beta}=0$，可得 $\beta=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

故 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.