1997 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

（1）已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(\cos x\right)^{x^{-2}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____.

【答】 $e^{-\frac{1}{2}}$.

【详解】 由题设 $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)=f\left(0\right)$, 即

$$a=\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{x^{-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\tan x}{2x}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

（2）设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, 则 $y''\big|_{x=0}=$_____.

【答】 $-\dfrac{3}{2}$.

【详解】 由题意得

$$y=\frac{1}{2}\ln\left(1-x\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$y'=-\frac{1}{2\left(1-x\right)}-\frac{x}{1+x^2},$$

$$y''=-\frac{1}{2\left(1-x\right)^2}-\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

于是

$$y''\big|_{x=0}=-\frac{3}{2}$$

（3）$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x\left(4-x\right)}}=$______.

【答】 $2\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}+C$ 或 $\arcsin\dfrac{x-2}{2}+C$

【详解】 方法一：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x\left(4-x\right)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{4-\left(x-2\right)^2}}=\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

方法二：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\sqrt{x}} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{4-\left(\sqrt{x}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + C$$

（5）已知向量组$\alpha_1=(1,2,-1,1),\alpha_2=(2,0,t,0),\alpha_3=(0,-4,5,-2)$得秩为 2，则$t=$_____.

【答】 3.

【详解】 方法一：

由于秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2,$则矩阵$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}$的任一个三阶子阵的行列式的值为零，

即

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\2&0&t\\0&-4&5\end{vmatrix}=0,$$

解得$t=3.$

方法二：

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&-4&t+2&-2\\0&-4&5&-2\end{bmatrix}$$

秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2\Rightarrow t+2=5$

即 $t=3.$

二、选择题

（1）设$x\to 0$时，$e^{\tan x}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则n为

（A）1. （B）2. （C）3. （D）4

【 】

【答】 应选（C）.

【详解】 方法一：

由于$x\to 0$时，

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^4\right),$$

则

$$e^{\tan x}=1+\tan x+\frac{(\tan x)^2}{2!}+\frac{(\tan x)^3}{3!}+o\left(x^4\right)$$
$$e^{\tan x}-e^x=\tan x-x+\frac{1}{2}\left(\tan^2 x-x^2\right)+\frac{1}{3!}\left(\tan^3 x-x^3\right)+o\left(x^3\right)$$

又 $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$,

所以 $e^{\tan x}-e^x=\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$

从而 $e^{\tan x}-e^x$ 与 x^3 为同阶非等价无穷小.

应取 $n=3$,

故选（C）.

方法二：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(e^{\tan x}-1\right)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^n}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\cdot\tan x}{n\cdot(n-1)x^{n-2}}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x^{n-2}}$$

(2)设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)dx$,

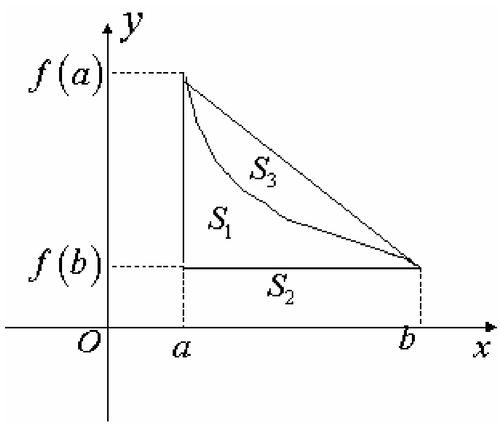
$S_2=f(b)(b-a), S_3=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)$，则

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.

(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

【 】

【答】 应选（B）.



【详解】

由 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$ 知，曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少且是凹曲线弧，于是有 $f(x)>f(b)$,

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), a<x<b.$$

从而

$$S_1=\int_a^b f(x)dx>f(b)(b-a)=S_2,$$
$$S_1=\int_a^b f(x)dx<\int_a^b\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right](b-a)=S_3.$$

即 $S_2<S_1<S_3$,故应选（B）.

（3）已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$，则

（A） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

（B） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（C） $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（D） $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 由 $f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$ 知，x_0 是 $f(x)$ 的驻点，将 $x=x_0$ 代入微分方程

$$xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x},$$

得 $$f''(x_0)=\frac{e^{x_0}-1}{x_0e^{x_0}}$$

可见无论 $x_0(\neq 0)$ 为何值，都有 $f''(x_0)>0$

所以

$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(3)设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$,则 $F(x)$

（A） 为正常数.　　　　　　　　　　　（B）为负常数.

（C）恒为零.　　　　　　　　　　　　（D）不为常数.

【 】

【答】 应选（A）.

【详解】 由于 $e^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的，因此

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\sin t dt \\
&= -\int_0^{2\pi} e^{\sin t} d\cos t \\
&= 0 + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot e^{\sin t} dt > 0.
\end{aligned}
$$

故应选（A）.

（5）设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\le 0\\ x+2, x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\ge 0\end{cases}$ 则 $g\left[f(x)\right]$ 为

（A）$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2-x, x\ge 0\end{cases}$　　　　（B）$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2+x, x\ge 0\end{cases}$

（C）$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2-x, x\ge 0\end{cases}$　　　　（D）$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2+x, x\ge 0\end{cases}$

【 】

【答】 应选（D）.

【详解】 根据 $g(x)$ 得定义知，复合函数

$$
g\left[f(x)\right]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\le 0\\ f(x)+2, f(x)>0\end{cases}
$$

而 $x<0$ 时，

$$
f(x)=x^2>0;
$$

$x\ge 0$ 时，

$$
f(x)=-x\le 0.
$$

故

$$
g\left[f(x)\right]=\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2+x, x\ge 0\end{cases}
$$

三、求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【详解】 方法一：

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}\sin t}}=1$$

方法二：

先进行有理化，再计算.

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right)}=1$$

(2)设 $y=y\left(x\right)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

【详解】 方法一：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2},$$

由 $$2\frac{dy}{dt}-y^2-2ty\frac{dy}{dt}+e^t=0,$$

得 $$\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2\left(1-ty\right)}$$

因而 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(y^2-e^t\right)\left(1+t^2\right)}{2\left(1-ty\right)}$$

方法二：

由 $x=\arctan t$，得 $t=\tan x$，将其代入题目中第二式有

$$2y-y^2\tan x+e^{\tan x}=5$$

两边对 x 求导得

$$2\frac{dy}{dx}-2y\cdot\tan x-y^2\cdot\sec^2 x+e^{\tan x}\cdot\sec^2 x=0,$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(y^2-e^{\tan x}\right)\left(1+\tan^2 x\right)}{1\left(1-y\tan x\right)}$$

（3）计算$\int e^{2x}\left(\tan x+1\right)^2 dx$

【详解】 方法一：

$$
\begin{aligned}
原式&=\frac{1}{2}e^{2x}\left(\tan x+1\right)^2-\int e^{2x}\left(\tan x+1\right)\sec^2 xdx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\left(\tan x+1\right)^2-\int e^{2x}\tan x\sec^2 xdx-\int e^{2x}\sec^2 xdx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\left(\tan x+1\right)^2-\frac{1}{2}e^{2x}\tan^2 x+\int e^{2x}\tan^2 xdx-\int e^{2x}\sec^2 xdx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\left(2\tan x+1\right)-\int e^{2x}dx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\left(2\tan x+1\right)-\frac{1}{2}e^{2x}+C\\
&=e^{2x}\tan x+C
\end{aligned}
$$

方法二：

由于$\left(\tan x+1\right)^2=1+\tan^2 x+2\tan x=\sec^2 x+2\tan x$

而$\sec^2 xdx=d\tan x$

从而

$$
\begin{aligned}
原式&=\int e^{2x}\sec^2 xdx+2\int e^{2x}\tan xdx\\
&=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan xdx+2\int e^{2x}\tan xdx\\
&=e^{2x}\tan x+C
\end{aligned}
$$

（4）求微分方程$\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$的通解.

【详解】 易知此方程为齐次方程，令$y=ux$, 则

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u,$$

代入原方程有

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{3\left(u^2-u-1\right)}{2u-1}$$

此为可分离变量方程，解得

$$u^2-u-1=Cx^{-3}$$

即 $$y^2-xy-x^2=Cx^{-1}$$

（5）已知$y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的

三个解，求此微分方程.

【详解】

由题设，并根据二阶线性非齐次微分方程解的结构知，

$y_1-y_3=e^{-x}$ 是齐次方程的解；

而　$y_2-e^{-x}=xe^{x}$ 仍为非齐次方程的特解，

进而得 $y_1-xe^{x}=e^{2x}$ 为齐次方程得解

即有 e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程的两个线性无关的解，且 xe^{x} 是非齐次方程的一个特解.

故
$$y=xe^{x}+C_1e^{2x}+C_2e^{-x}$$

是所求方程的通解.

由
$$y^{'}=e^{x}+xe^{x}+2C_1e^{2x}-C_2e^{-x},$$
$$y^{''}=2e^{x}+xe^{x}+4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

消去 C_1,C_2 所得的方程为
$$y^{''}-y^{'}-2y=e^{x}-2xe^{x}.$$

（6）已知 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$, 且 $A^2-AB=E$,其中 E 是三阶单位矩阵，求矩阵 B.

【详解】　因 $|A|\neq 0$，在 $A^2-AB=E$ 两边左乘 A^{-1}，得
$$A-B=A^{-1},$$

即
$$B=A-A^{-1}$$

又由　$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,　　得　$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$,

从而
$$B=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

四、λ取何值时，方程组$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组得通解.

【详解】　方法一：

原方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 5\lambda^2-\lambda-4=(\lambda-1)(5\lambda+4)$$

故当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq -\dfrac{4}{5}$时，方程组有唯一解.

当$\lambda=1$时，原方程组为

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-x_2+x_3=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1, \end{cases}$$

对其增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & \vdots & -3 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 9 & -9 & \vdots & -9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

因此，当$\lambda=1$时，原方程组有无穷多解，其通解为

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1+k \\ x_3=k \end{cases}$$

[或$(x_1,x_2,x_3)^T=(1,-1,0)^T+k(0,1,1)^T$ （k为任意实数）]

当$\lambda=-\dfrac{4}{5}$时，原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} 10x_1-4x_2-5x_3=5, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-10, \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1, \end{cases}$$

对其增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 & -5 & \vdots & 5 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -10 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & -4 & -5 & \vdots & 5 \\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

可见当$\lambda=-\frac{4}{5}$时，原方程组无解.

方法二：

对原方程组的增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix}2 & \lambda & -1 & \vdots & 1\\ \lambda & -1 & 1 & \vdots & 2\\ 4 & 5 & -5 & \vdots & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & \lambda & -1 & \vdots & 1\\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 3\\ -6 & -5\lambda+5 & 0 & \vdots & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & \lambda & -1 & \vdots & 1\\ \lambda+2 & \lambda-1 & 0 & \vdots & 3\\ 5\lambda+4 & 0 & 0 & \vdots & 9\end{bmatrix}$$

于是，当$\lambda=-\frac{4}{5}$时，原方程组无解.

当$\lambda\neq 1$且$\lambda\neq-\frac{4}{5}$时，方程组有唯一解.

当$\lambda=1$时，原方程组有无穷多解，其通解为

$$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-1+k\\ x_3=k\end{cases}$$

[或$(x_1,x_2,x_3)^T=(1,-1,0)^T+k(0,1,1)^T$（$k$为任意实数）]

五、设曲线L的极坐标方程为$r=r(\theta)$，$M(r,\theta)$为L上任一点，$M_0(2,0)$为L上一定点，若极径OM_0,OM与曲线L所围成的曲边扇形面积值等于L上M_0,M两点间弧长值的一半，求曲线L的方程.

【详解】 由题设，有

$$\frac{1}{2}\int_0^{\theta}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\theta}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta,$$

两边对θ求导，得

$$r^2=\sqrt{r^2+r'^2}\text{ ，即 }\quad r'=\pm r\sqrt{r^2-1}$$

从而 $$\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=\pm d\theta$$

因为 $$\int\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{r}+C,$$

所以 $$-\arcsin\frac{1}{r}+C=\pm\theta$$

由条件$r(0)=2$，知

$$C=\frac{\pi}{6}$$

故所求曲线L的方程为

$$r\sin\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right)=1,$$

即
$$r=\csc\left(\frac{\pi}{6}\mp\theta\right),$$

即直线方程为

$$x\mp\sqrt{3}y=2.$$

六、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数)，又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积值围 2，求函数 $y=f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【详解】 由题设值，当 $x\neq 0$ 时，

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$$

即
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2},$$

根据此并由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性，得

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx, x\in[0,1]$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)dx=\left(\frac{1}{2}ax^3+\frac{C}{2}x^2\right)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$$

即
$$C=4-a,$$

因此
$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$$

旋转体得体积为

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx$$
$$=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi$$

由

$$V^{'}\left(a\right)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi=0$$

得 $a=-5$.

又因$V^{''}\left(a\right)=\frac{1}{15}>0$

故$a=-5$时，旋转体体积最小.

七、已知函数 $f\left(x\right)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=2$, 设$\varphi\left(x\right)=\int_0^1 f\left(xt\right)dt$, 求$\varphi^{'}\left(x\right)$的连续性.

【详解】

由题设，知 $f\left(0\right)=0,\varphi\left(0\right)=0$

令 $u=xt$, 得$\varphi\left(x\right)=\frac{\int_0^x f\left(u\right)du}{x}\left(x\neq 0\right)$

即

$$\varphi\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right)=\frac{\int_0^x f\left(u\right)du}{x}\left(x\neq 0\right)\\ 0, \qquad\qquad\qquad x=0\end{cases}$$

从而

$$\varphi^{'}\left(x\right)=\frac{xf\left(x\right)-\int_0^x f\left(u\right)du}{x^2}\left(x\neq 0\right)$$

由导数定义有

$$\varphi^{'}\left(0\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f\left(u\right)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\varphi^{'}\left(x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xf\left(x\right)-\int_0^x f\left(u\right)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f\left(u\right)du}{x^2}$$
$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi^{'}\left(0\right)$$

从而知$\varphi\left(x\right)$在$x=0$处连续.

八、就k的不同取值情况，确定方程$x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$在开区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内根的个数，并证明你的结论.

【详解】 设 $f\left(x\right)=x-\frac{\pi}{2}\sin x,$

则 $f\left(x\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续.

由 $f^{'}\left(x\right)=1-\frac{\pi}{2}\cos x=0,$

得 $f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的唯一的驻点 $x_0=ar\cos\frac{2}{\pi}$

由于当 $x\in\left(0,x_0\right)$时， $f^{'}\left(x\right)<0$，

当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$时， $f^{'}\left(x\right)>0$.

所以 $f\left(x\right)$在$\left[0,x_0\right]$上单调减少，在$\left[x_0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加.

因此 x_0 是 $f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的唯一的最小值点，

最小值为 $y=f\left(x_0\right)=x_0-\frac{\pi}{2}\sin x_0$.

又因 $f\left(0\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

故在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内 $f\left(x\right)$的取值范围为$\left[y_0,0\right)$.

故当 $k\notin\left(y_0,0\right)$，即 $k<y_0$ 或 $k\geq 0$ 时，原方程在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内没有根；

当 $k=y_0$ 时，原方程在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内有唯一根 x_0;

当 $k\in\left(y_0,0\right)$时，原方程在$\left(0,x_0\right)$和$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$内各恰有一根，

即原方程在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内恰有两个不同的根.