1998 年全国硕士研究生入学统一考试
理工数学二试题详解及评析

一、填空题

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$______.

【答】 $-\dfrac{1}{4}$.

【详解 1】 用四则运算将分子化简，再用等价无穷小因子代换，

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{4x^2} \qquad \text{因}\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

【详解 2】 采用洛必达法则，

$$\text{原式}\xrightarrow{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x}$$

$$\xrightarrow{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{4}=-\frac{1}{4}.$$

注： $\sqrt{1-x^2}\to 1\left(x\to 0\right)$ 可求出

【详解 3】 采用 $\left(1+u\right)^{\lambda}$ 的马克劳林展开式，此时余项用皮亚诺余项较简单.当 $u\to 0$ 时

$$\left(1+u\right)^{\lambda}=1+\lambda u+\frac{\lambda\left(\lambda-1\right)}{2!}u^2+o\left(u^2\right),$$

所以 $x\to 0$ 时

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o\left(x^2\right),$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+\left(-\frac{1}{8}\right)x^2+o\left(x^2\right),$$

于是

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{4}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}$$

（2）曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$_____.

【答】 $\frac{37}{12}$.

【详解】 因为 $y\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}, y(1)=2,$

所以

$$A=\int_{-1}^{0}-\left(-x^3+x^2+2x\right)dx+\int_{0}^{2}\left(-x^3+x^2+2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=\frac{37}{12}$$

（3） $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=$_____ .

【答】 $-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-x+C.$

【详解】 用分部积分法，有

$$\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int\ln\sin x d\left(\cot x\right)=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\cot^2 x dx$$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x+\int\left(\csc^2 x-1\right)xdx$$

$$=-\cot x\cdot\ln\sin x-\cot x-X+C$$

（4）设 $f\left(x\right)$ 连续，则 $\frac{d}{dx}\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=$______.

【答】 $xf\left(x^2\right)$.

【详解】 令 $u=x^2-t^2, dy=-2tdt,$

当 $t=0$ 时，$u=x^2$; 当 $t=x$ 时，$u=0$ ；

故 $$\frac{d}{dx}\int_0^x tf\left(x^2-t^2\right)dt=\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{2}f\left(u\right)du=xf\left(x^2\right)$$

（5）曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)\left(x>0\right)$ 的渐进线方程为_____.

【答】　$y=x+\frac{1}{e}$

【详解】

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$$

故此曲线的渐进线方程为 $y=x+\frac{1}{e}$.

二、选择题

设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则下列断言正确的是

（A）　若 x_n 发散，则 y_n 必发散.

（B）　若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

（C）　若 x_n 有界，则 y_n 必有无穷小.

（D）　若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

【　】

【答】　应选（D）

【详解】　方法一：

由极限运算性质知

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0,$$

所以（D）为正确选项.

方法二：

取数列 $y_n=0$，排除（A）

若取数列

$$x_n=\begin{cases}2k-1, n=2k-1\\ 0, n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots)$$

$$y_n=\begin{cases}0, n=2k-1\\ 2k, n=2k\end{cases}(k=1,2,\cdots)$$

便排除了（B）

对于（C），若数列 $x_n=0$，则 y_n 可为任意数列，所以（C）项也不正确.

故应选（D）.

（2）函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是

（A）3.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）0.

【 】

【答】　应选（C）.

【详解】　因为

$$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|=(x-2)(x+1)|x(x-1)(x+1)|,$$

可见 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处不可导，而在 $x=-1$ 处是可导的，

故　$f(x)$ 的不可导点的个数为 2.

（3）已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\vartriangle y=\dfrac{y\vartriangle x}{1+x^2}+\alpha,$ 且当 $\vartriangle x\to 0$ 时，α 是 $\vartriangle x$ 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于

（A）$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.　　（B）π.　　（C）$e^{\frac{\pi}{4}}$.　　（D）2π

【 】

【答】　应选（A）.

【详解】　由 $\vartriangle y=\dfrac{y\vartriangle x}{1+x^2}+\alpha,$，有

$$\frac{\vartriangle y}{\vartriangle x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\vartriangle x}.$$

令 $\vartriangle x\to 0$，得　$y'=\dfrac{y}{1+x^2}$，

解此微分方程并利用初始条件由 $y(0)=\pi,$ 得 $y=\pi e^{\arctan x}$

故　$$y(1)=\pi e^{\arctan x}=\pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

（4）设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其几大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有

（A）$(x-a)\left[f(x)-f(a)\right]\ge 0.$

（B）$(x-a)\left[f(x)-f(a)\right]\le 0.$

（C）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0\,(x\ne a)$

（D）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0\,(x\ne a)$

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 由题设，存在邻域 $(a-\delta,a+\delta)$，使当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，有

$f(x)\le f(a)$ $f(x)\le f(a)$，

所以

当 $a-\delta<x<a$ 时，$(x-a)\left[f(x)-f(a)\right]\ge 0.$

当 $a<x<a+\delta$ 时，$(x-a)\left[f(x)-f(a)\right]\le 0.$

因此（A）、（B）不成立.

考虑到（C）、（D）两项中分母均大于零，而分子部分有

$$\lim_{t\to a}\left[f(t)-f(x)\right]=f(a)-f(x)\ge 0,$$

所以必有（C）成立.

（5）设 A 是任一 $n(n\ge 3)$ 阶方阵，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\ne 0,\pm 1$，则必有 $(kA^*)=$_____.

（A）kA^* （B）$k^{n-1}A^*$ （C）k^nA^* （D）$k^{-1}A^*$

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 方法一：

采用加条件的技巧，设 A 可逆，则由

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

知 $$A^*=|A|A^{-1}$$

于是

$$\begin{aligned}(kA^*)&=|kA|\cdot(kA)^{-1}=k^n|A|\cdot\frac{1}{k}A^{-1}\\&=k^{n-1}\cdot|A|A^{-1}\\&=k^{n-1}A^*\end{aligned}$$

所以应选（B）

题设 $k \neq 0, \pm 1$，$n \geq 3$，主要是为了做到 4 个选项只有 1 个正确的.

方法二：

由 A^* 的定义，设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，其元素 a_{ij} 的代数余子式记作 A_{ij}，则矩阵 $kA=\left(ka_{ij}\right)_{n\times n}$，

若其元素的代数余子式记作 $\Delta_{ij}\left(i, j=1,2,\cdots,n\right)$，由行列式性质有

$\Delta_{ij}=k^{n-1}A_{ij}\left(i, j=1,2,\cdots,n\right)$

从而 $\left(kA^*\right)=k^{n-1}A^*$

三、

求函数 $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $\left(0,2\pi\right)$ 内的间断点，并判断其类型.

【详解】$\dfrac{1}{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 在区间 $\left(0,2\pi\right)$ 内不存在的点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 各点，$f\left(x\right)$ 在区间

$\left(0,2\pi\right)$ 内的间断点是 $\dfrac{1}{\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 不存在的点，

即 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 各点.

在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{t\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^+} f\left(x\right)=+\infty,$

在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{t\to\left(\frac{5\pi}{4}\right)^+} f\left(x\right)=+\infty,$

故 $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}$ 处，$f\left(x\right)$ 为第二类间断点.

在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处，$\lim\limits_{t\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^+} f\left(x\right)=1,$

在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 处，$\dfrac{7\pi}{4}$ 为 $f\left(x\right)$ 的可去间断点.

但相应的函数在上两点处无定义，故 $x=\dfrac{7\pi}{4}$，$\dfrac{7\pi}{4}$ 为 $f\left(x\right)$ 的可去间断点.

四、确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\dfrac{\ln\left(1+t^3\right)}{t}dt}=c\left(c\neq 0\right)$

【详解】当 $x \to 0$ 时，$ax - \sin x \to 0$，且存在而不为零,

故 $\lim\limits_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln\left(1+t^3\right)}{t}dt = 0,$ 因此 b 必为 0.

因若 $b>0,$ 则在 $\left(0,b\right]$ 内，$\frac{\ln\left(1+t^3\right)}{t}>0$；

若 $b<0$，则在 $\left[b,0\right)$ 内，$\frac{\ln\left(1+t^3\right)}{t}>0$

利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln\left(1+t^3\right)}{t}dt} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}.$$

若 $a \neq 1$，则上式为 ∞，与条件不符，

故　$a=1$

从而再用洛必达法则有

得　$c=\frac{1}{2}$；

因此 $a=1, b=0, c=\frac{1}{2}$

五、利用代换 $y=\frac{u}{\cos x}$ 将方程 $y^{"}\cos x - 2y^{'}\sin x + 3y\cos x = e^x$ 化简，并求处原方程的通解.

【详解】　方法一：

有 $u = y\cos x$ 两端对 x 求导，得

$$u^{'} = y^{'}\cos x - y\sin x,$$
$$u^{"} = y^{"}\cos x - 2y^{'}\sin x - y\cos x.$$

于是原方程化为

$$u^{"} + 4u = e^x$$

其通解为

$$u = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{e^x}{5}$$

从而原方程得通解为

$$y = C_1\frac{\cos 2x}{\cos x} + C_2\sin x + \frac{e^x}{5\cos x}$$

方法二：

$$y = u\sec x,$$
$$y' = u'\sec x + u\sec x\cdot\tan x$$
$$y'' = u''\sec x + u'\sec x\cdot\tan x + u\sec x\cdot\tan^2 x + u\sec^3 x$$

代入原方程得

$$u'' + 4u = e^x$$

以下同方法一.

六、计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

【详解】 $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin\left(2x-1\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Bigg|_{1+\varepsilon}^{\frac{3}{2}}$$
$$= \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

因此 $$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

七、从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y （从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系.设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m, 体积为 B, 海水比重为 ρ, 仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 $k\left(k>0\right)$.试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函

数关系式 $y=y(v)$.

【详解】 取沉放点为原点 O, Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-B\rho-kv,$$

这是可降阶的二阶微分方程，其中 $v=\frac{dy}{dt}$.

令 $\frac{dy}{dt}=v$, 则 $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}=v\frac{dv}{dy}$,

于是原方程可化为

$$mv\frac{dv}{dy}=mg-B\rho-kv,$$

分离变量得

$$dy=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}dv,$$

积分得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C$$

再根据初始条件 $v\big|_{y=0}=0$, 得

$$C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv),$$

故所求函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}.$$

八、设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

（1）试证存在 $x_0\in(0,1)$, 使得再区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于再区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

（2）又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f^{'}(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的 x_0 试唯一的.

【详解】 （1）令 $\varphi(x)=-x\int_x^1 f(t)\,dt$, 则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内

可导；

又$\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 由罗尔定理知，存在$x_0\in(0,1)$, 使$\varphi'(x_0)=0$. 即

$$\varphi'(x_0)=x_0 f(x_0)-\int_{x_0}^{1} f(t)dt=0.$$

也即 $$x_0 f(x_0)=\int_{x_0}^{1} f(x)dx.$$

（2）令 $F(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)dt,$

则 $$F'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=2f(x)-xf'(x)>0,$$

即 $F(x)$在$(0,1)$内严格单调增加，从而$F(x)=0$的点$x=x_0$必唯一，故（1）中的x_0试唯一的.

九、设有曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所得的旋转体的表面积.

【详解】 设切点的横坐标为x_0, 则切点为$\left(x_0,\sqrt{x_0-1}\right)$，曲线$y=\sqrt{x-1}$在此点的切线斜率为$\dfrac{1}{2\sqrt{x_0-1}}$，

于是切线方程为：

$$y-\sqrt{x_0-1}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0)$$

又因它经过原点，以点$(0,0)$代入，得

$$-2(x_0-1)=-x_0,$$

解得 $$x_0=2$$

于是切线方程为

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$$

即 $$y=\frac{1}{2}x$$

切点为$(2,1)$，由曲线段$y=\sqrt{x-1}\ (1\le x\le 2)$绕$x$轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_1=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+y'^2}dx=x\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right),$$

由直线$y=\dfrac{1}{2}x\left(0\le\le 2\right)$段绕$x$轴旋转一周所得到的旋转面的面积为

$$S_2=\int_1^2 2\pi\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx=\sqrt{5}\pi$$

因此，所求旋转体的表面积为

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5}-1\right)$$

十、设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

【详解】 因曲线向上凸，故 $y''<0$；

由题设，得

$$\frac{-y''}{\sqrt{\left(1+y'^2\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

即 $y''=-\left(1+y'^2\right).$

曲线经过点 $(0,1)$，故 $y(0)=1,$ 又因在该点处的切线方程为 $y=x+1$，即切线斜率为 1，于是 $y'(0)=1,$ 问题归结为求

$$\begin{cases} y''=-\left(1+y'^2\right). \\ y(0)=1, y'(0)=1, \end{cases}$$

的特解.

令 $y'=p, y''=p',$

于是得

$$p'=-\left(1+p^2\right),$$

分离变量解得

$$\arctan p=C_1-x$$

以 $p(0)=1$ 代入，

得 $$C_1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

所以 $$y'=p=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

再积分，得

$$y=\int \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+C_2$$

以 $y(0)=1,$ 代入，得

$$C_2=1+\frac{1}{2}\ln 2,$$

故所求曲线方程为

$$y=\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|+1+\frac{1}{2}\ln 2$$

取其含有 $x=0$ 在内的连续的一支为

$$y=\ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+1+\frac{1}{2}\ln 2,x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$$

当 $x\to\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+$ 或 $x\to\left(-\frac{3\pi}{4}\right)^+$ 时，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\to 0, y\to-\infty$，

故此函数无极小值.

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，y 为极大，

极大值为

$$y=1+\frac{1}{2}\ln 2.$$

十一、设 $x\in(0,1)$，证明：

（1）$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2;$

（2）$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

【详解】

（1）　令 $\varphi(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2;$

则有

$\varphi(0)=0,$

$\varphi^{'}(x)\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,\varphi^{'}(0)=0.$

$\varphi^{''}(x)=\frac{2}{1+x}\left[\ln(1+x)-x\right],$

$\varphi^{'''}(x)=-\frac{2\ln(1+x)}{1+x}<0,x\in(0,1)\Rightarrow\varphi^{''}(x)<\varphi^{''}(0)=0\Rightarrow\varphi^{'}(x)<\varphi^{'}(0),x\in(0,1)$

所以 $\varphi^{'}(x)<0,$

从而 $\varphi(x)<0$,即

$$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2,$$

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}, x\in(0,1)$

则有

$$f^{'}(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

由(1)知, $f^{'}(x)$<0,

当 $x\in(0,1)$ 时.于是推知在 $(0,1)$ 内, $f(x)$ 单调减少.又 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上连续,且

$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$.

故当 $x\in(0,1)$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}>\frac{1}{\ln 2}-1$$

不等式左边证毕.

又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}$$

故当 $x\in(0,1)$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}>\frac{1}{2}$$

不等式右边证毕.

十二、设 $\left(2E-C^{-1}B\right)A^T=C^{-1}$,其中 E 是 4 阶单位矩阵, A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵.

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

求 A.

【详解】 由题设得

$$C\left(2E-C^{-1}B\right)A^T=E,\text{即}\left(2C-B\right)A^T=E.$$

由于 $2C-B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\left|2C-B\right|=1\neq 0,$

故 $2C-B$ 可逆.

于是 $A=\left[\left(2C-B\right)^{-1}\right]^T=\left[\left(2C-B\right)^T\right]^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}$$

十三、已知 $\alpha_1=\left(1,4,0,2\right)^T,\alpha_2=\left(2,7,1,3\right)^T,\alpha_3=\left(0,1,-1,a\right)^T,\beta=\left(3,10,b,4\right)^T$，问

（1）a,b 取何值时，β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示？

（2）a,b 取何值时，β 能由 α_1，α_2，α_3 线性表示？并写出其表达式.

【详解】　因为

$$\overline{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta\right)=\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\4&7&1&\vdots&10\\0&1&-1&\vdots&b\\2&3&a&\vdots&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\0&-1&1&\vdots&2\\0&1&-1&\vdots&b\\0&-1&a&\vdots&-2\end{bmatrix}\to$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&\vdots&3\\0&-1&1&\vdots&2\\0&0&a-1&\vdots&0\\0&0&0&\vdots&b-2\end{bmatrix}$$

所以

（1）当 $b\neq 2$ 时，线性方程组 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)x=\beta$ 无解，

此时 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（2）当 $b=2,a\neq 1$ 时，线性方程组 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)x=\beta$ 有唯一解：

$$x=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T=\left(-1,2,0\right)^T$$

于是 β 可唯一表示为：

$$\beta=-\alpha_1+2\alpha_2$$

当$b=2,a=1$时，线性方程组$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=\beta$有无穷多个解：

$$x=(x_1,x_2,x_3)^T=k(-2,1,1)^T+(-1,2,0)^T \quad （k\text{为任意常数}）$$

这时β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示：

$$\beta=-(2k+1)\alpha_1+(k+2)\alpha_2+k\alpha_3 \quad （k\text{为任意常数}）$$