2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

[非教育部考试中心官方标准试题，仅供参考]

（1） 选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数（ ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（ ）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$ （B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$ （D）$(-1)^n n!$

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列$\{s_n\}$有界是数列$\{a_n\}$收敛的（ ）

(A)充分必要条件. (B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件. （D）既非充分也非必要条件.

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx(k=1,2,3)$ 则有（ ）

（A）$I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

（5）设函数 f (x,y) 可微，且对任意 x,y 都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是（ ）

(A) $x_1>x_2, y_1<y_2$. (B) $x_1>x_2, y_1>y_2$.

(C) $x_1<x_2, y_1<y_2$. (D) $x_1<x_2, y_1>y_2$.

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint\left(xy^3-1\right)dxdy=$( )

$(A)\pi$ $(B)2$ $(C)-2$ $(D)-\pi$

（7）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中$c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$. 则 $Q^{-1}AQ$=(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________。

（10）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________。

（11）设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$，其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________。

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|BA^*|=$ ________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x,}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

（16）（本题满分　　分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta(0\le\theta\le\pi)$ 与极轴围成。

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及

$f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

（20）（本题满分 11 分）

证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

（22）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（1）计算行列式|A|；

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

（23）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})x$ 的秩为 2，

（1） 求实数 a 的值；

（2） 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型.