2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题参考答案

[非教育部考试中心官方标准答案，仅供参考]

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

解析：（C）

由 $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$，得 $y=1$ 为水平渐近线

由 $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$ 得 $x=1$ 为垂直渐近线

由 $\lim\limits_{x\to -1} y=\dfrac{1}{2}\neq\infty$，得 $x=-1$ 非垂直渐近线，选（C）

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

解析：　(A)

$$\because f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)\square 2e^{2x}\cdots(e^{nx}-n)$$
$$+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots ne^{nx}$$
$$\therefore f'(0)=1\times(-1)\times\cdots\times(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

选（A）

（3）设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的（　　）

(A)充分必要条件.　　(B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）既非充分也非必要条件.

【答案】: (B)

【解析】: S_n有界$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=0$

当$\lim_{n\to\infty}a_n$收敛，S_n不一定有界.

如$a_n=1+\frac{1}{n},\lim_{n\to\infty}a_n=1.$

而 $S_n\geqslant n+1\to\infty$（$n\to\infty$），选(B).

（4）设$I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin xdx(k=1,2,3)$则有（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　(B) $I_3<I_2<I_1$　(C) $I_2<I_3<I_1$　(D) $I_2<I_1<I_3$

解析： (D)

$$I_2=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx=I_1-\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx<I_1.$$

$$I_3=I_1-\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx.$$

而$\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx\underline{\underline{x-\pi=t}}-\int_{\pi}^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin tdt$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}|\sin x|dx>\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}|\sin x|dx.$$

$\therefore I_3>I_1.$

$\therefore I_3>I_1>I_2.$

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是（　　）

(A) $x_1>x_2,\ y_1<y_2.$　　(B) $x_1>x_2,\ y_1>y_2.$

(C) $x_1<x_2,\ y_1<y_2.$　　(D) $x_1<x_2,\ y_1>y_2.$

【答案】: (D)

【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$表示函数$f(x,y)$关于变量$x$是单调递增

的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 必有

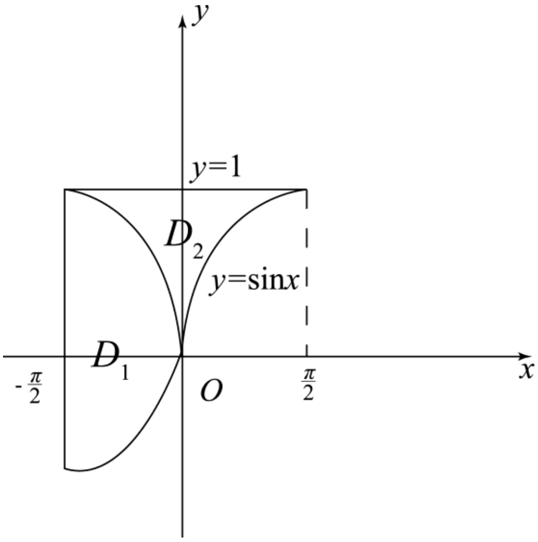
$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选(D)

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint\left(xy^3-1\right)dxdy=(\quad)$

$(A)\pi\quad(B)2\quad(C)-2\quad(D)-\pi$

【答案】：(D)

【解析】：



$$\iint_D (xy^3-1)d\sigma=\iint_{D_1}(xy^3-1)d\sigma+\iint_{D_2}(xy^3-1)d\sigma$$

由对称性，

$$\iint_{D_1}(xy^3-1)d\sigma=-\iint_{D_1}d\sigma$$

$$\iint_{D_2}(xy^3-1)d\sigma=-\iint_{D_2}d\sigma$$

$$\therefore\iint_D(xy^3-1)d\sigma=-\iint_D d\sigma=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)dx=-\pi$$

选（D）

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\quad\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\quad\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为

任意常数，则下列向量组线性相关的为（　　）

（A）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　　（B）$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$（C）$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$　　（D）$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

解析：（C）

$$\alpha_3+\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\c_3+c_4\end{pmatrix},\because \alpha_3+\alpha_4\text{与}\alpha_1\text{成比例.}$$

$\therefore \alpha_1$与$\alpha_3+\alpha_4$线性相关,$\therefore \alpha_1$，α_3，α_4线性相关，选（C）

或$$\left|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，选（C）

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 P=($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$. 则 $Q^{-1}AQ$=(　　)

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D)$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析：（B）

$$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________。

【答案】：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{e^y+1}$.

【解析】：$x^2-y+1=e^y\Rightarrow 2x-\dfrac{dy}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{e^y+1}$

（10）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$ ________。

【答案】：$\dfrac{\pi}{4}$

【解析】：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

（11）设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

【答案】：0.

【解析】：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\cdot f'$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}f'$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________。

【答案】：$x=y^2$.

【解析】：$ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=3y-\dfrac{1}{y}x$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=3y$$

$$x=\left[\int 3y\cdot e^{\int\frac{1}{y}dy}dy+c\right]e^{-\int\frac{1}{y}dy}$$

$$=(y^3+c)\frac{1}{y}$$

$$\because y(1)=1,\therefore c=0,\therefore x=y^2$$

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

【答案】：$(-1,0)$

【解析】：$y'=2x+1, y''=2.$

$$\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(2x+1)^2=1\Rightarrow x=-1\Rightarrow y=0.$$

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|BA^*|=$________。

【答案】：**-27**

【解析】：$|B|=-|A|=3$

$$|A^*|=|A|^2=9.$$

$$\therefore |BA^*|=-27.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x},$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】：① $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+1)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}+1=1\Rightarrow a=1$

② $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-a]=\lim\limits_{x\to0}[f(x)-1]=\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

$\because \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\therefore x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$\therefore f(x)-a\sim\frac{1}{6}x.\therefore k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值

解析：

由 $\begin{cases} f_x'=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$f_{xx}''=(x^3-3x)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$f_{xy}''=-y(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$f_{yy}''=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

当 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 时，$A=2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=e^{-\frac{1}{2}}.$

$\because AC-B^2>0$ 且 $A>0$，$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$ 为极小点.

极小值为 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}.$

当$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$时，$A=-2e^{-\frac{1}{2}},B=0,C=-e^{-\frac{1}{2}},$

$\because AC-B^2>0$且$A<0,\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$为极大点

极大值为 $f(1,0)=e^{\frac{1}{-2}}$

（17）（本题满分 10 分）

过点（0，1）点作曲线 L：$y=\ln x$的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】:

①设切点为 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$

$$由k=\frac{1}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{-x_0}得x_0=e^2.切点为A(e^2,2)$$

切线为 $y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2),即y=\frac{x}{e^2}+1.$

切线与 x 轴交点为 B（$-e^2$,0）

$$A=\int_0^2[e^y-e^2(y-1)]dy=e^2-1.$$

②

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2e^2-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 xdx \\ &=\frac{8\pi}{3}e^2-\pi x\ln^2 x\Big|_1^{e^2}+2\pi\int_1^{e^2}\ln xdx \\ &=\frac{8\pi}{3}e^2-4\pi e^2+2\pi x\ln x\Big|_1^{e^2}-2\pi\int_1^{e^2}dx \\ &=\frac{8\pi}{3}e^2-4\pi e^2+4\pi e^2-2\pi(e^2-1) \\ &=\frac{2\pi}{3}e^2+2\pi. \end{aligned}$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分$\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线$r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$与极轴围成。

【解析】: $$\iint\limits_D xyd\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^3\sin\theta\cos\theta dr$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)^4 d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\cos^8\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=16\int_0^{\pi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)\cos^8\frac{\theta}{2}d\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t(2\cos^2 t-1)\cos^9 t\,dt$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^{11} t\,dt-16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^9 t\,dt$$

$$=\frac{32}{12}-\frac{16}{10}=\frac{16}{15}.$$

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

解析： 1) $\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1$

$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0\Rightarrow f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x,$

代入 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $C_1=0,C_2=1.$

$\therefore f(x)=e^x$

2） $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt.$

$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1.$

$y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x=2(1+2x^2)\int_0^x e^{-t^2}dt+2x.$

令 $y''=0$ 得 $x=0.$

当$x<0$时．$y''<0$，当$x>0$时，$y''>0$

故(0，0)为曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$的拐点.

（20）（本题满分 11 分）

证明$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$(-1<$x$<1)

证明：令$\varphi(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}.\varphi(0)=0.$

$$\varphi'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}x-\sin x$$

$0<x<1$时．$\ln\frac{1+x}{1-x}>0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}x\geq x$，又$\sin x\leq x$.

$\therefore\varphi'(x)>0$；

$-1<x<0$时，$\ln\frac{1+x}{1-x}<0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}x\leq x$,又$\sin x\geq x$.

$\therefore\varphi'(x)<0$.

$\Rightarrow x=0$为$\varphi(x)$在（-1，1）内最小点，而φ（0）=0

∴当-1<x<1 时．$\varphi(x)\geq 0$，即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}$$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程$x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1$的整数$)$，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为x_n，证明$\lim_{n\to\infty}x_n$存在，并求此极限。

【解析】：（I）证明：

令$f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1(n>1)$

$$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{2^n}-1$$

$$=-\frac{1}{2^n}<0.$$

$$f(1)=n-1>0$$

$\because f(\frac{1}{2})f(1)<0, \therefore f(x)$在（$\frac{1}{2}$，1）内至少有一个零点

又$\because f'(x)=nx^{n-1}+\cdots+1>0$

$\therefore f(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上单增

故 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且只有一个零点.

即原方程在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个根.

（II）

$$\because f(x_n)-f(x_{n+1})=0$$

$$\therefore (x_n-x_{n+1})+\cdots+(x_n^n-x_{n+1}^n)=x_{n+1}^{n+1}>0.$$

$\therefore x_n>x_{n+1}$.即 $\{x_n\}\downarrow$

又 $\{x_n\}$ 有界

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.显然 $a<1$.

由 $\dfrac{x_n-x_n^n}{1-x_n}=1\Rightarrow \dfrac{a}{1-a}=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

（22）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（1）计算行列式|A|;

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

解析：

（I）$\left|A\right| = 1 + (-1)^5 a \cdot a^3 = 1 - a^4$

（II）当$a=1$及$a=-1$时，Ax= β有无穷多个解.

当$a=1$时，

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

通解为 $x = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当$a=-1$时.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

通解为 $x = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（23）（本题满分 11 分）

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})x$ 的秩为 2，

（1） 求实数 a 的值；

（2） 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准型.

解析：

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{pmatrix}$$

$\because x^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})x$ 秩为 2. $\therefore r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})=2$(也可以利用$r(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})=r(\mathrm{A})=2$)

$\Rightarrow \left|\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\right|=0\Rightarrow a=-1$ （ $\because \left|\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\right|=(a^2+3)(a+1)^2$）

(II)令 $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

由 $\left|\lambda \mathrm{E}-\mathrm{B}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$

解 $\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$

当 $\lambda=0$时，由$(0E-A)x=0$ 即 $\mathrm{A}x=0$ 得 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda=2$时,由$(2E\text{-}A)x=0\Rightarrow \xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

当$\lambda=6$时,由$(6E\text{-}A)x=0\Rightarrow \xi_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

取$r_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},r_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

令$Q=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

$$f=x^{\mathrm{T}}\mathrm{B}x \;\underline{\underline{x=Qy}}\; 2y_2^2+6y_3^2$$